DÉNOMBREMENT

Exercice 1. Un jeu de 52 cartes est composé de 4 couleurs (♣, ♥, ♦, ♠) et de 13 valeurs (1, 2, 3, ..., 10, V, D, R). Au poker, une main est constituée de cinq cartes prises parmi 52 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2) Combien y a-t-il de mains possibles avec au moins une figure ?
3) Combien y a-t-il de mains possibles avec un carré ?
4) Combien y a-t-il de mains possibles avec un full ?
5) Combien y a-t-il de mains possibles avec une double paire ?
6) Combien y a-t-il de mains possibles avec une paire ?
7) Combien y a-t-il de mains possibles avec une quinte flush ?
8) Combien y a-t-il de mains possibles avec une suite ?
9) Combien y a-t-il de mains possibles avec une couleur ?

Exercice 2. Donner le nombre d'anagrammes (distincts) des mots MATHS, CHIMIE, SCIENCES, BLABLACAR

Exercice 3. Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétisme, huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont jamaïcains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium dans l'ordre d'arrivée.

1) Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2) Combien y a-t-il de podiums 100% jamaïcains ?
3) Combien y a-t-il de podiums avec au moins un jamaïcain ?
4) Combien y a-t-il de podiums avec exactement deux jamaïcains ?

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \neq j\right\} \qquad E_2 = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i < j\right\} \qquad E_3 = \left\{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3 \mid i \leq j \leq k\right\}$$

Exercice 5. Soit E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On suppose que $\operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$. Montrer que $A \cap B \neq \varnothing$.

Exercice 6. Soit $a, b, n \in \mathbb{N}$. En développant $(1+X)^{a+b}$ de deux manières, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
Retrouver cette formule par dénombrement.

Exercice 7 (*Oral CCP*). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 8 ($\star$). Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On part du point $(0,0)$ et on souhaite arriver au point (p,q) en se déplaçant, à chaque étape, soit d'une unité vers la droite, soit d'une unité vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?